Méthode QR

Théorème 1 (Méthode QR). *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On suppose que ses valeurs propres sont de modules distincts et on les classe par modules décroissants : $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. On construit la suite :*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1}$ et P^{-1} admet une décomposition LU. Alors la diagonale de A_k converge vers $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et les coefficients sous la diagonale tendent vers 0.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque Q_k est unitaire, on a $R_k = Q_k^\star A$, donc $A_{k+1} = Q_k^\star A Q_k$. Par une récurrence immédiate, on a alors que $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^\star A \mathcal{Q}_k$, où $\mathcal{Q}_k = \prod_{i=1}^k Q_i$. De plus, on a également que $A^k = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k$, où $\mathcal{R}_k = \prod_{i=1}^k R_{k-i}$:

$$\begin{aligned} A^k &= (Q_1R_1) \cdots (Q_1R_1) \\ &= Q_1(R_1Q_1) \cdots (R_1Q_1)R_1 = Q_1(Q_2R_2) \cdots (Q_2R_2)R_1 \\ &= Q_1Q_2(R_2Q_2) \cdots (R_2Q_2)R_2R_1 = \ldots = (Q_1Q_2 \cdots Q_k)(R_k \cdots R_2R_1) \end{aligned}$$

Étape 1 : Calculons la décomposition QR de A^k d'une autre manière.

On note $P = QR$ et $P^{-1} = LU$ les factorisations QR et LU respectives et $\Lambda = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P\Lambda^k P^{-1} = QR\Lambda^k LU = QR(\Lambda^k L \Lambda^{-k})\Lambda^k U$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\Lambda^k L \Lambda^{-k} = (\lambda_i^k L_{i,j} \lambda_j^{-k})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire inférieure de termes diagonaux valant 1. De plus :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall 1 \leqslant j < i \leqslant n,\ (\Lambda^k L \Lambda^{-k})_{i,j} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k L_{i,j} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Ainsi, $\lim_{k\to\infty}(\Lambda^k L \Lambda^{-k}) = I_n$. En particulier, $\lim_{k\to\infty} R(\Lambda^k L \Lambda^{-k})R^{-1} = I_n$. Notons $O_k T_k$ la décomposition QR de $R(\Lambda^k L \Lambda^{-k})R^{-1}$. Par continuité de la décomposition QR, et puisque $O_k T_k = R(\Lambda^k L \Lambda^{-k})R^{-1}$ converge vers I_n, on en déduit que O_k et T_k convergent aussi vers I_n. On a ainsi obtenu :

$$A^k = QR(\Lambda^k L \Lambda^{-k})\Lambda^k U = (QO_k)(T_k R \Lambda^k U)$$

Or, la matrice QO_k est unitaire comme produit de matrices unitaires, et la matrice $T_k R \Lambda^k U$ est triangulaire supérieure comme produit de matrices triangulaires supérieures. Il existe alors une matrice $D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que :

$$D_k T_k R \Lambda^k U \in T_n^+(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ |(D_k)_{i,i}| = 1$$

Par unicité de la décomposition QR, on a alors :

$$\mathcal{Q}_k = QO_k D_k^\star \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_k = D_k T_k R \Lambda^k U$$

Étape 2 : Montrons la convergence de A^k.

Grâce à ce que l'on vient de trouver, on peut écrire :

$$A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^\star A \mathcal{Q}_k = (QO_kD_k^\star)^\star A(QO_kD_k^\star) = D_kO_k^\star Q^\star AQO_kD_k^\star$$

Or, puisque $A = P\Lambda P^{-1} = QR\Lambda^k R^{-1}Q^{-1}$ on obtient :

$$A_{k+1} = D_kO_k^\star Q^\star QR\Lambda R^{-1}Q^{-1}QO_kD_k^\star = D_kO_k^\star R\Lambda R^{-1}O_kD_k^\star$$

De plus, comme R est diagonale supérieure, et puisque O_k converge vers I_n, on a :

$$\lim_{k\to\infty} A_{k+1} = \lim_{k\to\infty} D_kO_k^\star(R\Lambda R^{-1})O_kD_k^\star = \lim_{k\to\infty} D_kO_k^\star \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O_kD_k^\star = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*') \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi A_k converge bien vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$\square$

Références

[Cia88] P. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation.* Masson